

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 2i$.
 - a. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
 - b. Faire une figure et placer les points A et B.
 - c. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$.
3. On note F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.
 - a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
 - b. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OF})$ puis de l'angle $(\vec{u}, \vec{OF})$.
 - c. Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.
 - d. En déduire la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ces résultats sont-ils contradictoires? Justifier la réponse.