

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

1. a. Vérifier que :

$$\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

- b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.
c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}.$$

- b. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n) .
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel k ,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

En déduire que, pour tout entier naturel k , on a l'égalité : $A_k A_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}$.

- b. Pour tout entier naturel n , on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0 , A_1 , A_2 , ..., A_n .
On a ainsi : $\ell_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.