

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour tout entier $n \geq 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O .

On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

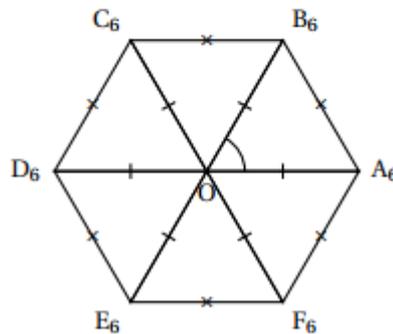
Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

On a représenté ci-contre un polygone P_6 .

1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6 .

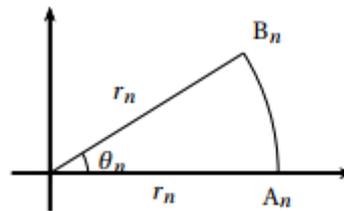
3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.



Partie B : cas général avec $n \geq 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geq 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n .

On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2} \sin(\theta_n)$.

2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.

Donner, en fonction de n , une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; \pi[$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Ainsi, le nombre r_n , défini dans la partie B pour $n \geq 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \pi[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$.
2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L , et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
3. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\frac{2}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?