

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n , par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe 2. L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n .

1. a. Vérifier que $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
 b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.$$

- b. Pour quelles valeurs de n , les points O , A_0 et A_n sont-ils alignés?
3. Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
 a. Interpréter géométriquement d_n .
 b. Calculer d_0 .
 c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

- d. En déduire que la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n ,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .
- c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.
- d. Justifier cette construction.