

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel n , par

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3}u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + \sqrt{3}v_n \end{cases}.$$

1. Calculer les valeurs de u_1, v_1, u_2, v_2 .
2. On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel N donné.
 - a. On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier S est un nombre réel T est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S Affecter 0 à T Affecter 0 à K
Traitement :	Tant que $K < N$ Affecter $\sqrt{3}S - T$ à S Affecter $S + \sqrt{3}T$ à T Affecter $K + 1$ à K Fin Tant que
Sortie :	Afficher S Afficher T

Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 2$. Pour cela, on recopiera et complètera le tableau de variables ci-dessous :

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

- b. L'algorithme précédent affiche-t-il les valeurs de u_N et v_N pour un entier N donné?
 Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de u_N et v_N pour un entier N .
3. On pose, pour tout entier naturel n , $z_n = u_n + i v_n$.
 On note a le nombre complexe $a = \sqrt{3} + i$.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$z_{n+1} = a z_n.$$

- b. Écrire a sous forme exponentielle.
- c. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} u_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \\ v_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \end{cases}$$