

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendantes.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie A

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1 .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$