

Exercice 3**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation

$$(E): z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
 - a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).
 - b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
 - c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$.
4. Calculer les longueurs $M_1 M_2$ et $M_2 M_3$.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_n M_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$.
5. On note $\ell_n = M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_n M_{n+1}$.
 - a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
 - b. Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1000$.

