On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : A et B des nombres réels

K et N des nombres entiers

Initialisation : Affecter à A la valeur 1

Affecter à B la valeur 1

Traitement :

Entrer la valeur de N

Pour K variant de 1 à N

Affecter à A la valeur $\dfrac{\mathrm{A}+\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}{3}$

Affecter à B la valeur $\dfrac{\mathrm{B}}{3}$

FinPour

Afficher A

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).
3. **a.** On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

   $$\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

   Montrer que pour tout entier naturel n,

   $$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2|z_n|}{3}.$$

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

   $$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

   En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

   c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.