

I/ Suite de nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct (unité graphique : 4 cm).

A_0 est le point d'affixe 2. Pour tout entier naturel n , si A_n est un point d'affixe z_n , on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu de $[A_n A'_n]$.

On note ρ_n et θ_n le module et un argument de z_n .

1°) Placer les points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$.

2°) a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$

b) En déduire que la suite (ρ_n) est géométrique et que la suite (θ_n) est arithmétique.

Préciser leur premier terme et leur raison.

c) Exprimer ρ_n et θ_n en fonction de n .

d) Déterminer la limite de la suite (ρ_n) . Interpréter géométriquement ce résultat.

e) Pour quelles valeurs de n , les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3°) a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$.

b) Exprimer en fonction de n la longueur L_n de la ligne brisée $A_0 A_1 \dots A_n$ puis déterminer sa limite.