On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) dont les termes vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

1. On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n, la matrice colonne X_n définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation :

$X_{n+1} = A \cdot X_n + B$

2. **a.** Justifier que la matrice $I_2 - A$ est inversible. On donner a l'expression de la matrice $(I_2 - A)^{-1}$.

b. Déterminer la matrice X réalisant l'égalité :

$X = A \cdot X + B$

c. Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.

3. On considère la suite (V_n) de matrice-colone définie par :

$V_n = X_n - X$

En déduire que, pour tout entier n naturel, la relation :

$V_n = A^n \cdot V_0$

4. On considère la matrice carré P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Justifier que la matrice P est inversible.

b. On note D la matrice définie par : $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n.

c. En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.

5. On prend comme valeur initiale des suites :

$x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 2$

Que peut-on dire sur la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?