EXERCICE 1

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n.

1. On considère la matrice B définie par $B = A - I_3$. Donner l'expression de B^2 et B^3.

2. **a.** Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(I_3 + B)^n$ pour n entier naturel non-nul ? Justifier votre réponse.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$A^n = \binom{n}{0} \cdot I_3 + \binom{n}{1} \cdot B + \binom{n}{2} \cdot B^2$$

EXERCICE 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n.

1. On considère la matrice B définie par $B = A - D$. Donner l'expression de B^2 et B^3.

2. **a.** Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(D + B)^n$ pour n entier naturel non-nul ? Justifier votre réponse.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$A^n = (-1)^n \cdot \binom{n}{0} \cdot I_3 + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{1} \cdot B + (-1)^{n-2} \cdot \binom{n}{2} \cdot B^2$$