On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

On définit la suite de matrice (X_n) par la relation $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On considère la matrice A définie par : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

1. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
$X_{n+1} = A \cdot X_n$

b. Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier naturel n :
$X_n = A^n \cdot X_0$

2. On définit les matrices P et P' :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \quad ; \quad P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

a. Montrer que les matrices P et P' sont inversibles.

b. Déterminer la matrice B diagonale réalisant l'égalité suivante :
$P' \cdot B \cdot P = A$

c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$A^n = P' \cdot B^n \cdot P$

3. **a.** Donner l'expression de la matrice B^n en fonction de n.

b. Etablir que la matrice X_n admet pour expression, pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$

4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).