On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.

Pour cela, on considère les deux matrices carrées P et Q :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. Etablir l'égalité : $A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot Q$

On note D la matrice : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. **a.** Donner l'expression de la matrice D^n où n est un entier naturel.

b. Etablir pour tout entier naturel n, l'égalité :
$A^n = P \cdot D^n \cdot Q$

c. Donner l'expression de A^n en fonction de n.