EXERCICE 1

On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Etablir que $A^3 = 2 \cdot I_3$.

2. Donner une expression de A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 2

On considère la suite A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2^n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Etablir que pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Indication : on utilisera : $A^{n+1} = A \cdot A^n$

EXERCICE 3

1. Soit n un entier naturel non-nul. On considère A et B deux matrices carrées d'ordre n inversible et λ un nombre réel non-nul.

a. Montrer que le produit $A \cdot B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.

b. Montrer que la matrice $\lambda \cdot A$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.

2. On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que la relation suivante est fausse :

$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$