Pour tout entier naturel n, on définit : $u_n = (3+2\sqrt{2})^n$.

1) Montrer qu'on peut écrire les premiers termes de la suite (u_n) sous la forme :
$u_0 = a_0 + b_0\sqrt{2}$, $u_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$, $u_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$, où les nombres a_j et b_j sont des entiers à déterminer.

2) Montrer par récurrence sur n que u_n s'écrit sous la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$ avec a_n et b_n des entiers ; et que ces entiers vérifient les relations de récurrence $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$.

3) On veut écrire un algorithme dont l'entrée est un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et dont la sortie est constitué des valeurs de a_n et b_n.

Un élève propose l'algorithme suivant :

```
Entrée : n entier naturel supérieur ou égal à 2
Traitement :  a prend la valeur 3
              b prend la valeur 2
              Pour j allant de 1 à n
                   a prend la valeur 3a + 4b
                   b prend la valeur 2a + 3b
              Fin du pour
Sortie : afficher a et b
```

Modifier cet algorithme pour qu'il réponde à l'objectif annoncé.

4) A partir des relations de récurrence de la question 2, identifier la matrice A carrée d'ordre 2 telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

5) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$.

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

On écrit $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec α et β deux réels.

c) Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel non nul n.

d) Calculer A^n en fonction des réels α et β et de l'entier naturel non nul n.

6) Etablir que $a_n = \frac{1}{2}[(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n]$ pour tout entier $n \geq 1$.

Déterminer aussi l'expression de b_n en fonction de n.