

EXERCICE 45

La population d'une ville se répartit entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour des raisons familiales ou professionnelles, 10 % des propriétaires deviennent locataires tandis que 20 % des locataires deviennent propriétaires.

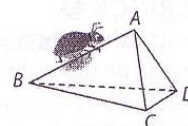
L'évolution des populations de propriétaires et de locataires s'apparente à une marche aléatoire sur un graphe probabiliste à deux sommets.

- 1) Représenter ce graphe et écrire la matrice de transition de cette marche aléatoire.
- 2) Déterminer l'état stable de la marche aléatoire. Interpréter le résultat.

EXERCICE 46

On considère une puce se déplaçant d'un sommet à l'autre sur les côtés d'un tétraèdre ABCD. À chaque instant :

- avec une probabilité de 0.2, la puce saute aléatoirement sur l'un des sommets du tétraèdre (y compris celui d'où elle vient) ;
- avec une probabilité de 0.8, la puce se déplace de façon équiprobable sur l'une des arêtes partant du sommet où elle se trouve et rejoint le sommet adjacent.



Pour tout entier naturel n , on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$, où a_n, b_n, c_n et d_n désignent les probabilités que la puce soit

respectivement sur les sommets A, B, C et D au bout de n étapes.

a_n, b_n, c_n et d_n sont des réels positifs tels que $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$.

1) a) Justifier que, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 0.8\left(\frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n\right) + 0.05$.

b) Déterminer la matrice carrée M d'ordre 4 et la matrice colonne K de dimension 4×1 telles que $U_{n+1} = 0.8M \times U_n + K$.

2) On considère l'équation (E) : $X = 0.8M \times X + K$ où X est une matrice colonne ayant 4 lignes.

a) Justifier que l'équation (E) est équivalente à : $(I_4 - 0.8M) \times X = K$.

b) En utilisant la calculatrice, déterminer la matrice U solution de (E).

3) a) Démontrer par récurrence que : $U_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3\left(\frac{-4}{15}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{-4}{15}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{-4}{15}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{-4}{15}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n .

b) Montrer que la suite (U_n) converge vers U . Interpréter ce résultat.