EXERCICE 43

Par suite d'une forte augmentation des prix des carburants de 2010 à 2011, certains salariés d'une entreprise changent de mode de déplacement pour se rendre sur leur lieu de travail.

En 2010, 80 % des salariés utilisaient leur voiture personnelle.

En 2011, 30 % des salariés utilisant leur voiture en 2010 ne l'utilisaient plus et 10 % des personnes ne l'utilisant pas en 2010 l'utilisaient en 2011.

On suppose que ces proportions restent constantes d'une année à l'autre.

On note A l'état "un salarié utilise sa voiture personnelle" et B l'état "un salarié n'utilise pas sa voiture personnelle".

1) Représenter cette marche aléatoire par un graphe et écrire sa matrice de transition, les états étant pris dans l'ordre A, B.
2) Quelle est la probabilité qu'un salarié de cette entreprise utilise sa voiture personnelle en 2012 ? en 2015 ?
3) Soit x_n la probabilité qu'un salarié utilise sa voiture personnelle au cors de l'année $(2010+n)$.
   a) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.
   b) Déterminer l'expression de x_n en fonction de n.
   c) Est-il possible d'envisager qu'à terme, aucun salarié n'utilise sa voiture personnelle pour aller au travail ?

EXERCICE 44

Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boîtes de céréales.

On considère 1000 personnes qui, chaque semaine, achètent exactement une boîte de ces céréales.

Au bout d'une semaine, elles auront toutes une image.

L'état E_n du système la $n^{\text{ième}}$ semaine est représenté par une matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ où a_n est le nombre de personnes ayant une seule sorte d'image, b_n est le nombre de personnes ayant exactement deux images distinctes et c_n est le nombre de personnes ayant les trois images.

Quand on a une seule image, la probabilité d'en tirer une nouvelle est $\frac{2}{3}$; quand on a deux sortes d'images, la probabilité de tirer la troisième sorte est $\frac{1}{3}$.

1) Donner la matrice X_1.
2) Ecrire le graphe et la matrice de transition de cette marche aléatoire.
3) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Avec la calculatrice, calculer P^{-1} puis $D = P^{-1}MP$.
4) Déterminer D^n puis M^n en fonction de n.
5) En déduire X^n en fonction de n.
6) Calculer la limite de la suite (X_n) et l'interpréter.
7) On considère que toutes les personnes ont les trois images lorsque $c_n > 999$. Donner l'expression de c_n en fonction de n et écrire un algorithme pour déterminer au bout de combien de semaines on peut considérer que toutes les personnes ont les trois images.