EXERCICE 40

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout naturel n.

1) Déterminer les éventuelles suites constantes vérifiant cette relation de récurrence.
2) La suite de matrices (U_n) converge-t-elle ?

EXERCICE 41

On imagine un pays dont la population reste constante égale à 10 millions d'habitants.
Des relevés annuels et une hypothèse de stabilité dans l'évolution permettent de considérer que chaque année, 10 % de la population rurale émigre vers les zones urbaines alors que 5 % de la population urbaine émigre vers les zones rurales.
Au début de l'étude (année 0), la répartition est : 6 millions de ruraux et 4 millions de citadins.
L'objectif de cet exercice est de prévoir l'évolution de cette répartition et, en particulier, de savoir si, sous ces hypothèses, on peut prévoir une désertification totale des zones rurales.
On note r_n la population, en millions d'habitants, des zones rurales l'année n et u_n celle des zones urbaines.
On pose aussi $P_n = \begin{pmatrix} r_n \\ u_n \end{pmatrix}$.

1) Donner P_0 et trouver la matrice M carrée d'ordre 2 telle que $P_{n+1} = M \times P_n$ pour tout naturel n.
2) En utilisant le fait que $u_n + r_n = 10$, montrer que $P_{n+1} = A \times P_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0.85 & 0 \\ 0 & 0.85 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3) Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.
4) Déterminer l'expression de P_n en fonction de n.
5) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$ et interpréter.