EXERCICE 37

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit la suite de matrices (U_n) telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$.

1) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer sa matrice inverse P^{-1} ; puis calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
2) Calculer D^n puis A^n en fonction de n.
3) Déterminer la matrice C telle que $C = AC + B$.
4) Exprimer U_n en fonction de n.
5) Etudier la convergence de la suite (U_n).

EXERCICE 38

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$.

1) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer sa matrice inverse P^{-1} ; puis calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
2) Calculer D^n puis A^n en fonction de n.
3) Déterminer les matrices C telles que $C = AC + B$.
4) Exprimer U_n en fonction de n.
5) Etudier la convergence de la suite (U_n).

EXERCICE 39

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On définit la suite de matrices colonnes (X_n) par la relation $X_{n+1} = A \times X_n + B$ pour tout entier naturel n et $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la suite de matrices constantes égales à $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ vérifie la relation de récurrence.

2) a) Soit $D = \frac{1}{2}A$. Déterminer la matrice N telle que $D = I_2 + N$.
   b) Calculer N^2 ; puis calculer D^2 et D^3 en fonction de I_2 et N.
   c) En déduire les expressions des matrices D^n et A^n en fonction de n.

3) La suite (X_n) est-elle convergente ?