EXERCICE 35

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On définit la suite de matrices colonnes (X_n) par $X_{n+1} = A \times X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

2) Etudier la convergence de la suite (X_n).

EXERCICE 36

On considère une population de rongeurs ayant un cycle de reproduction de deux ans. On s'intéresse ici au groupe des femelles. Chaque femelle donne naissance (en moyenne) à une femelle durant sa première année de vie et à huit femelles pendant sa deuxième année de vie. D'autre part, la probabilité pour qu'un rongeur survive une deuxième année est de 0.25 et il n'y a aucune chance qu'il survive au delà de la deuxième année.
On note a_n le nombre de femelles juvéniles (âgées de moins d'un an), b_n le nombre de femelles adultes (âgées entre un et deux ans), c_n le nombre total de femelles dans la population étudiée après n périodes ($n \in \mathbb{N}$).
On suppose qu'il y a 20 rongeurs femelles juvéniles et aucune souris femelle adulte à l'instant initial.

1) On note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Trouver la matrice A, carrée d'ordre 2, telle que $X_{n+1} = AX_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1} puis calculer $D = P^{-1}AP$.

3) Pour n entier naturel, calculer D^n puis montrer que $A^n = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 \times 2^n + 4 \times (-1)^n & 32 \times 2^n - 32 \times (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 4 \times 2^n + 8 \times (-1)^n \end{pmatrix}$

4) En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

5) Calculer la limite de chacune des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

6) Calculer les limites de $\frac{a_n}{c_n}$, $\frac{b_n}{c_n}$ et $\frac{c_{n+1}}{c_n}$. Interpréter ces résultats.