EXERCICE 23

Dans un repère du plan, on recherche une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par les trois points $P(1;4)$, $Q(-2;-5)$ et $R(-1;0)$.

1) Traduisez l'appartenance de ces trois points à la parabole par un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues a, b, c que l'on écrira sous forme matricielle $AX = B$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \alpha \\ \frac{1}{2} & 0 & \beta \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \gamma \end{pmatrix}$.

Démontrer qu'on peut trouver trois réels α, β et γ tels que M soit la matrice inverse de A.

3) Résoudre alors le système (S) et en déduire l'équation de la parabole recherchée.

EXERCICE 24

Pour régler un péage de 20 €, un automobiliste utilise en tout 49 pièces, réparties en x pièces de 1 €, y pièces de 0.50 € et z pièces de 0.20 €. On se propose de déterminer toutes les combinaisons possibles pour payer.

1) Ecrire le problème sous la forme matricielle $AX = B$ où A est une matrice carrée d'ordre 2, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et B est une matrice colonne de dimension 2×1 dépendant de z.

2) Prouver que A est inversible et calculer sa matrice inverse A^{-1}.

3) En déduire les expressions de x et y en fonction de z.

4) Déterminer toutes les façons de payer ce péage.

EXERCICE 25

1) Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 2x = a \\ x + 3y = b \\ -x + y - 2z = c \end{cases}$ d'inconnues réelles x, y, z où a, b, c sont des paramètres réels.

2) En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.