

EXERCICE 29

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Ecrire la matrice J telle que $A = I + J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3.
- 2) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $J^n = O_3$, où O_3 désigne la matrice nulle carrée d'ordre 3.
- 3) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$: $A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$.
b) Cette égalité est-elle vraie pour $n = 1$? pour $n = 0$?
- 4) En déduire la matrice A^n en fonction de n .
- 5) Vérifier que l'égalité du 3a donne, pour $n = -1$, l'expression de la matrice A^{-1} . Donner alors A^{-1} .

EXERCICE 30

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer $P \times Q$, $Q \times P$, P^2 , Q^2 .
- 2) Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que $A = xP + yQ$.
- 3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $A^n = 4^n P + 2^n Q$.

EXERCICE 31

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer A^2 et A^3 .
- 2) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
a) Démontrer que $A \times P = P \times D$.
b) Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
c) En déduire que $A = PDP^{-1}$; puis démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d) En déduire l'expression de A^n en fonction de l'entier naturel n et vérifier qu'elle est cohérente avec les résultats de la question 1.