EXERCICE 34 : la suite de Fibonacci

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier naturel n.

1) Calculer quelques uns des premiers termes de cette suite.

2) Identifier la matrice A, carrée d'ordre 2, telle que $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

3) Démontrer que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

4) Soit $P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 5-\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 5+\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $Q = P^{-1}$.

b) Calculer la matrice $D = QAP$.

c) Démontrer que $A^n = PD^nQ$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 15

Soit a un réel.

On définit deux suites u et v de la façon suivante : $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = au_n + v_n$ et $v_{n+1} = av_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Identifier la matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

2) Calculer A^2 et A^3.

3) Conjecturer l'expression de A^n pour tout naturel n et la démontrer par récurrence.

4) Montrer que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n. avec $n \neq 0$

En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

EXERCICE 20

Soit A, B et C trois matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) telles que $AB = I$ et $CA = I$, où I désigne la matrice identité d'ordre n.

Démontrer que $B = C$.

EXERCICE 21

1) Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n inversibles.

Démontrer que la matrice AB est inversible d'inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2) Soit M et N deux matrices carrées d'ordre n inverses l'une de l'autre.

La matrice N^3 est-elle l'inverse de la matrice M^3 ? Justifier.