Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues x et y sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (E)$$

1. Déterminer un couple solution $(x\ ;\ y)$ où x et y sont deux entiers naturels.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) par :

   $$x_0 = 1,\ y_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n,\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de l'équation (E).

   b. En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} > x_n$.

3. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

2. Soient a et b deux entiers naturels.

   Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.

3. Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution de l'équation (E) définie dans la partie A, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

4. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

   Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.