Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).
Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel $n$, cette évolution par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_0 & = & 1\,000 \\ c_0 & = & 1\,500 \\ b_{n+1} & = & 0{,}3b_n + 0{,}5c_n \\ c_{n+l} & = & -0{,}5b_n + 1{,}3c_n \end{array}\right.$$

où $b_n$ représente approximativement le nombre de buses et $c_n$ le nombre approximatif de campagnols le 1[er] juin de l'année $2000 + n$ (où $n$ désigne un entier naturel).

**1.** On note $A$ la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel $n$, $U_n$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

**a.** Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 1\,050 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$ et calculer $U_2$.

**b.** Vérifier que, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = AU_n$.

On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.** On admet que $P$ a pour inverse une matrice $Q$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où $a$ est un réel.

**a.** Déterminer la valeur de $a$ en justifiant.

**b.** On admet que $A = PTQ$.
Démontrer que, pour tout entier $n$ non nul, on a

$$A^n = PT^nQ.$$

**c.** Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier $n$ non nul,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0{,}8^n & 0{,}5n \times 0{,}8^{n-1} \\ 0 & 0{,}8^n \end{pmatrix}.$$

**3.** Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie $N = 40$.
Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols ?

| | |
|---|---|
| Initialisation : | $N$ prend la valeur 0 |
| | $B$ prend la valeur 1 000 |
| | $C$ prend la valeur 1 500 |
| Traitement : | Tant que $B > 2$ ou $C > 2$ |
| | $N$ prend la valeur $N + 1$ |
| | $R$ prend la valeur $B$ |
| | $B$ prend la valeur $0{,}3R + 0{,}5C$ |
| | $C$ prend la valeur $-0{,}5R + 1{,}3C$ |
| | Fin Tant Que |
| Sortie : | Afficher $N$ |

**4.** On admet que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a

$$U_n = \begin{pmatrix} 1\,000 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0{,}8^n \\ 1\,500 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0{,}8^n \end{pmatrix}$$

et

$$n \leqslant 10 \times 1{,}1^n.$$

**a.** En déduire les limites des suites $(b_n)$ et $(c_n)$.

**b.** Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.
À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent ?