1. Soit p un entier relatif donné.
On s'intéresse dans cette question à l'équation (E_p)

$$3x+4y=p$$

où $(x\,;\,y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-p\,;\,p)$ est une solution particulière de l'équation.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_p) est l'ensemble des couples de la forme

$$(-p+4k\,;\,p-3k) \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne

$$6x+8y-z=0.$$

2. Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ qui appartient au plan $\mathscr{P}$ et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que z_0 est pair.

b. On pose $z_0=2p$ où p est un entier relatif.
Prouver que le couple $(x_0\,;\,y_0)$ est solution de l'équation (E_p).

c. En utilisant la question 1., déterminer l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ à coordonnées entières.

3. À tout point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, on associe le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ avec

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & 75 & 180\\56 & 41 & -144\\28 & -30 & 29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $6x'+8y'-z'=101(6x+8y-z)$.

b. En déduire que si le point M est un point du plan $\mathscr{P}$, alors le point M' est aussi un point du plan $\mathscr{P}$.

c. Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par O.
Montrer que si le point M appartient à Δ, alors le point M' appartient aussi à Δ.