

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 5; -2)$, $B(7; -1; 3)$ et $C(-2; 7; -2)$ et on note P le plan (ABC) .

On cherche une équation cartésienne du plan P sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$, où M est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit N la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N .

3. Montrer alors que : $X = NY$.

En déduire que le plan P admet pour équation cartésienne :

$$10x + 15y + 6z = 73.$$

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan P ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $M(x ; y ; z)$ un point appartenant au plan P et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x , y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
 - a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation $(E) : 2x + 3y = 11$.
 - b. Justifier que le couple $(7 ; -1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.
 - c. Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan P et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.
2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x ; y ; z)$ du plan P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Soient x , y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

 - a. Montrer que y est impair.
 - b. Montrer que : $x \equiv 1 \pmod{3}$. On admet que : $z \equiv 3 \pmod{5}$.
 - c. On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p , q et r sont des entiers naturels.

Montrer que le point $M(x ; y ; z)$ appartient au plan P si et seulement si $p + q + r = 1$.
 - d. En déduire qu'il existe exactement trois points du plan P dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.