(asie 2017)

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :

- elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;
- elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1-p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.

Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :

- p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
- q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admet que, pour tout entier n, on a : $X_{n+1} = AX_n$ et donc, $X_n = A^n X_0$.

1. **a.** Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

   b. On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que : $A = PDP^{-1}$.

   c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

   $$A^n = PD^nP^{-1}.$$

   d. En vous appuyant sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-contre, déterminer l'expression de q_n en fonction de n.

2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98. On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25. Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission ?

1	$X0 := [[1], [0]]$	
	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	M
2	$P := [[1, 1], [1, -1]]$	
	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	M
3	$D := [[1, 0],[0, 2*p-1]]$	
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2*p-1 \end{bmatrix}$	M
4	$P*(D\hat{}n)*P\hat{}(-1)*X0$	
	$\begin{bmatrix} \dfrac{(2*p-1)^n+1}{2} \\ \dfrac{-(2*p-1)^n+1}{2} \end{bmatrix}$	M