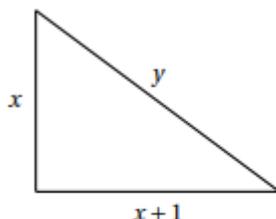


On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x + 1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y , où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x , $x + 1$ et y , où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x ; y)$ définit un TRPI.

Partie A

- Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x ; y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

- Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3 ; 5)$.
- Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
 - Montrer que dans un couple d'entiers $(x ; y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.
- Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x ; y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient x et y deux entiers naturels; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B.$$

- Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
 - Montrer que : $y'^2 - 2x'(x' + 1) = y^2 - 2x(x + 1)$.
 - En déduire que si le couple $(x ; y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x' ; y')$ définit également un TRPI.
- On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , le couple $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI.
- Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.