On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$.

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?
2. Soit n un entier naturel.
   Conjecturer la valeur de $\text{PGCD}(u_n\ ;\ v_n)$. Aucune justification n'est demandée.
3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1 258 291	838 861
13	11	5 033 165	3 355 443
14	12	20 132 659	13 421 773
15	13	80 530 637	53 687 091

   Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».
   Qu'en penser ?

Partie B : Étude arithmétique

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.
2. Soit n un entier naturel.
   Déduire de la question précédente la valeur de $\text{PGCD}(u_n\ ;\ v_n)$.

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}$.

b. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.