Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel $n$, on note :

- $R_n$ l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$,
- $C_n$ l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel $n$, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.
   **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = MU_n$.
   **b.** Calculer $U_1$. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.
2. Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $U_n$ en fonction de $M^n$ et de $U_0$.
3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $P$ et on la notera $P^{-1}$.
4. **a.** On pose $\Delta = P^{-1}MP$. Calculer $\Delta$ à l'aide de la calculatrice.
   **b.** Démontrer que : $M = P\Delta P^{-1}$.
   **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$M^n = P\Delta^n P^{-1}.$$

5. **a.** On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0,85^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0,85^n \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0,85^n & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0,85^n \end{pmatrix}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $R_n = 50\times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de $C_n$ en fonction de $n$.

**b.** Déterminer la limite de $R_n$ et de $C_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?

6. **a.** On admet que $(R_n)$ est décroissante et que $(C_n)$ est croissante.
Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.

**b.** En résolvant l'inéquation d'inconnue $n$, $50\times 0,85^n + 40 < 80 - 50\times 0,85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme.

**Exercice 4 Spécialité**
**Question 6 (à compléter et à remettre avec la copie)**

| | |
|---|---|
| Entrée : | $n$, $R$ et $C$ sont des nombres |
| Initialisation : | $n$ prend la valeur 0 |
| | $R$prend la valeur 90 |
| | $C$ prend la valeur 30 |
| Traitement : | Tant que ...... faire |
| | $n$ prend la valeur ... |
| | $R$ prend la valeur $50\times 0,85^n + 40$ |
| | $C$ prend la valeur ... |
| | Fin Tant que |
| Sortie : | Afficher $n$ |