

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

- Déterminer la matrice M^2 . On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
- Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
- En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

Partie B Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a , b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$ et $C(2; 5)$.

- Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a , b et c tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les nombres a , b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C Retour au cas général

Les nombres a , b , c , p , q , r sont des entiers.

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $A(1; p)$, $B(-1; q)$ et $C(2; r)$.

On cherche des valeurs de p , q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A , B et C .

- Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, avec a , b et c entiers, alors

$$\begin{cases} -3p + q + 2r & \equiv 0 [6] \\ 3p - 3q & \equiv 0 [6] \\ 6p + 2q - 2r & \equiv 0 [6] \end{cases}$$

- En déduire que $\begin{cases} q - r & \equiv 0 [3] \\ p - q & \equiv 0 [2] \end{cases}$.

- Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q - r & \equiv 0 [3] \\ p - q & \equiv 0 [2] \end{cases}$
 A, B, C ne sont pas alignés

alors il existe trois entiers a , b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A , B et C .

- Montrer que les points A , B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.
- On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q , r , a , b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A , B et C .

