

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.

On suppose que l'effectif de cette population est stable.

Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.

30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.

L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes. Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

- 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.

- 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

► **1.** Donner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.

► **2.** Soit $X_0 = (0,3 \quad 0,7)$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.

a) Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.

b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.

► **3.** Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la

matrice inverse de la matrice P .

► 4. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$. Calculer $P \times D \times P^{-1}$.

► 5. En déduire par récurrence que, pour tout entier n naturel, on a :
 $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

► 6. L'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ? Justifier.

► 7. Au bout de combien de temps atteindra-t-elle une part de marché supérieure ou égale à 66 % ?