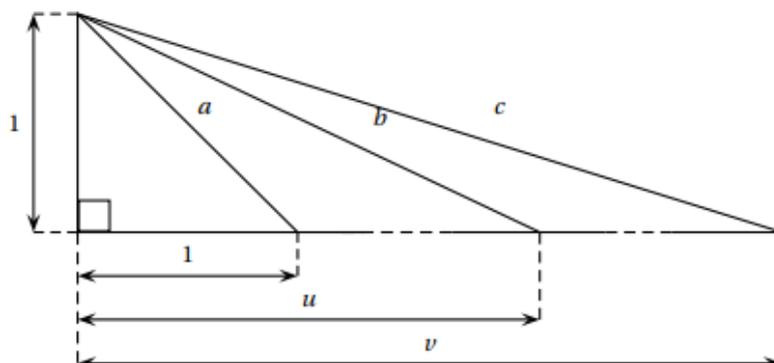


On s'intéresse à la figure suivante, dans laquelle a , b et c désignent les longueurs des hypoténuses des trois triangles rectangles en O dessinés ci-dessous.



Problème : on cherche les couples de **nombre entiers naturels non nuls** (u, v) tels que $ab = c$.

1. Modélisation

Démontrer que les solutions du problème sont des solutions de l'équation :

$$(E): v^2 - 2u^2 = 1 \quad (v \text{ et } u \text{ étant des entiers naturels non nuls}).$$

2. Recherche systématique de solutions de l'équation (E)

Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche au cours de son exécution tous les couples solutions de l'équation pour lesquels $1 \leq u \leq 1000$ et $1 \leq v \leq 1000$.

Pour u allant de 1 à ... faire	Au cours de son exécution, l'algorithme affiche :
Pour ...	2 3
Si ...	12 17
Afficher u et v	70 99
Fin Si	408 577
Fin Pour	
Fin Pour	

3. Analyse des solutions éventuelles de l'équation (E)

On suppose que le couple (u, v) est une solution de l'équation (E).

- Établir que $u < v$.
- Démontrer que n et n^2 ont la même parité pour tout entier naturel n .
- Démontrer que v est un nombre impair.
- Établir que $2u^2 = (v-1)(v+1)$.
En déduire que u est un nombre pair.

4. Une famille de solutions

On assimile un couple de nombres entiers (u, v) à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

On définit également la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- a. Démontrer que si une matrice colonne X est une solution de l'équation (E) , alors AX est aussi une solution de l'équation (E) .
- b. Démontrer que si une matrice colonne X est une solution de l'équation (E) , alors pour tout entier naturel n , $A^n X$ est aussi une solution de l'équation (E) .
- c. À l'aide de la calculatrice, donner un couple (u, v) solution de l'équation (E) tel que $v > 10000$.