

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.

On note, pour l'année $2017 + n$:

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achète une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0,4$ et $q_0 = 0,6$.

On note, pour tout entier naturel n , $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = MP_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$.
- Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.
- Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$M := \{\{0,65, 0,45\}, \{0,35, 0,55\}\}$	5	TQ
○	$\checkmark M := \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$	○	$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	$P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$	6	QT
○	$\checkmark P_0 := \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$	○	$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	$Q := \{\{9,1\}, \{7,-1\}\}$	7	$D := TMQ$
○	$\checkmark Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	○	$\rightarrow D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
4	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$		
○	$\checkmark T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$		

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

- Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.

On notera Q^{-1} la matrice inverse de Q .

- Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

- On admet que, pour tout entier naturel n non nul,

$$M^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9+7 \times 0,2^n & 9-9 \times 0,2^n \\ 7-7 \times 0,2^n & 7+9 \times 0,2^n \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que pour tout entier naturel n , $P_n = M^n P_0$.
- Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^n.$$

- La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?