EXERCICE 1

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = \frac{1}{2}(3u_{n+1} - u_n)$.

1. Ouvrir une nouvelle feuille de calcul dans un tableur et calculer les 20 premiers termes de la suite. Quelle conjecture peut-on faire quant au comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2. a. Posons, pour tout entier n, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Démontrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^n U_0$.

3. a. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b. Calculer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$ et calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Déduire de 3. b. l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Utiliser la question 2b. pour calculer le terme général de la suite (u_n) Étudier la convergence de cette suite et comparer avec les résultats obtenus dans la question 1..

EXERCICE 2

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \text{ pour tout } n \geqslant 0 \\ u_0 = 0 \,;\, u_1 = 1 \end{cases}.$$

Déterminer le terme général de la suite (u_n) en suivant la méthode de l'exercice 116.. On prendra $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.