111. On souhaite étudier le comportement des puissances n-ièmes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$ lorsque n devient très grand.

On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Avec une calculatrice, calculer A^5, A^8, A^{10}. Que constate-t-on ?
2. Démontrer que l'on a $AP = PD$.
3. Démontrer que P est inversible, et calculer P^{-1}.
4. En déduire que $A = PDP^{-1}$ et démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Donner l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. On fait tendre n vers $+\infty$, démontrer que les coefficients de la matrice A^n convergent vers ceux de la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Comparer avec les résultats obtenus à la question 1..

112. TICE On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$.

On utilisera une calculatrice ou un logiciel aux questions 1. 2. et 3..

1. Calculer A^5, A^{10} et A^{20}.
2. On donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible (en calculant son déterminant, voir l'encadré de l'exercice 91.) et calculer l'inverse de la matrice P.
3. Démontrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale dont on donnera les coefficients.
4. En déduire que l'on a $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer D^n puis A^n pour tout entier n.
5. On fait tendre n vers $+\infty$, démontrer que les coefficients de la matrice A^n convergent vers ceux d'une matrice B dont on donnera les coefficients. Comparer avec les résultats obtenus à la question 1.