EXERCICE 1

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a. Calculer $P \times Q$, $Q \times P$, P^2, Q^2.

b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $P^n = P$ et $Q^n = Q$.

2 Soit la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que $A = xP + yQ$.

3 Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$A^n = 4^n P + 2^n Q.$$

En admettant que $A^0 = I_2$, montrer que l'égalité précédente est vraie pour tout entier naturel n. (La matrice I_2 est la matrice identité dans l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.)

4 Calculer $(4P + 2Q)\left(\frac{1}{4}P + \frac{1}{2}Q\right)$.

En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

EXERCICE 2

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.

2 Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer B^2.
En déduire que $B^3 = 3^2 B$.

b. En utilisant un raisonnement par récurrence, calculer B^n pour tout entier naturel n non nul.