Soient a et b deux réels quelconques. On pose :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a+b & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix};\ \mathrm{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \mathrm{J}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 Montrer que, pour tous réels a et b, A s'exprime en fonction de I, J, a et b. **0,5 pt**

2 **a.** Calculer J^2. **0,5 pt**

b. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, J^n. **0,5 pt**

3 **a.** Calculer A^2. **0,5 pt**

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathrm{A}^n = a^n\mathrm{I}+\frac{(a+2b)^n-a^n}{2}\mathrm{J}.$$ **1,25 pt**

4 On pose $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. On suppose dans cette question que $a=0$ et que A est inversible.

Calculer $\mathrm{C}\left(\mathrm{AA}^{-1}\right)$ et $(\mathrm{CA})\times\mathrm{A}^{-1}$.

En déduire par un raisonnement par l'absurde que, lorsque a est nul, la matrice A n'est pas inversible. **0,5 pt**

b. On suppose dans cette question que $a+2b=0$ et que A est inversible.

Calculer $\mathrm{J}\left(\mathrm{AA}^{-1}\right)$ et $(\mathrm{JA})\mathrm{A}^{-1}$.

En déduire comme dans la question précédente que, lorsque $a+2b=0$, A n'est pas inversible. **0,5 pt**

c. On suppose $a\neq 0$ et $a+2b\neq 0$ et on pose $\mathrm{B}=\dfrac{1}{a}\mathrm{I}-\dfrac{b}{a(a+2b)}\mathrm{J}$.

Montrer que B est l'inverse de A. **0,75 pt**