Soit A la matrice carrée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$;

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1 Calculer A^2.

Montrer qu'il existe trois entiers relatifs u, v, w non tous nuls tels que :

$$uA^2 + vA + wI = O.$$ **0,75 pt**

2 **a.** Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, il existe un réel a_n tel que :

$$A^n = a_n A + (1 - a_n)I.$$

Par convention, on pose $A^0 = I$. **0,75 pt**

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$. **0,75 pt**

c. Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = a_n - 2$. Montrer que la suite (b_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme b_0. **0,5 pt**

d. Exprimer b_n, puis a_n, en fonction de n. **0,75 pt**

3 Donner l'expression de la matrice A^n en fonction de n sous la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}.$$ **0,75 pt**

4 Montrer que les suites (α_n), (β_n), (γ_n) et (δ_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective α, β, γ, δ. **0,75 pt**