1 Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier la relation $(M - I)(M + 3I) = 0$, où O_3 désigne la matrice nulle d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. **0,25 pt**

b. En déduire que la matrice $M - I$ n'est pas inversible (on pourra faire un raisonnement par l'absurde). **0,25 pt**

2 On pose $M^0 = I$, et pour tout entier naturel n :

$$M^{n+1} = M^n \times M.$$

a. Exprimer M^2 en fonction de M et I. **0,25 pt**

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = u_n M + v_n I$,

où u_n et v_n vérifient les relations $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}.$$

3 **a.** Vérifier, pour tout entier naturel, la relation :

$$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = 1.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -3u_n + 1.$$ **0,5 pt**

b. On pose, pour tout entier naturel n, $t_n = u_n - \dfrac{1}{4}$.

Montrer que la suite (t_n) est géométrique. En déduire une expression de t_n en fonction de n. **0,5 pt**

c. Donner pour tout n de $\mathbb{N}$, les expressions de u_n, v_n et M^n en fonction de n. **0,75 pt**

4 On se propose de déterminer u_n et v_n par une autre méthode.

a. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$ **0,25 pt**

b. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$ **0,5 pt**

c. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer P^2. En déduire P^{-1}, puis P^n pour tout entier naturel n. **0,5 pt**

d. Calculer $A' = P^{-1} \times A \times P$.

En déduire $(A')^n$, puis A^n, pour tout entier naturel n.

Retrouver ainsi les valeurs respectives de u_n et v_n en fonction de n. **0,75 pt**