Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y. D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1[er] janvier de l'année $2014+n$, exprimées en millions d'euros.
On note U_n la matrice $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ et on note $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
On suppose que le 1[er] janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1}=AU_n+B,\text{ où } A=\begin{pmatrix}0,6&0,15\\0,2&0,4\end{pmatrix}\text{ et } B=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

1. Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.
2. Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.
3. On note $D=\begin{pmatrix}0,3&0\\0&0,7\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&3\\-2&2\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}0,25&-0,375\\0,25&0,125\end{pmatrix}$.
   a. Donner sans détailler le calcul, la matrice PDQ.
   b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel QP. Dans la suite, on admettra que $QP=I$.

   On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n, $A^n=PD^nQ$.

4. On pose pour tout entier naturel n, $V_n=U_n-\begin{pmatrix}5\\20/3\end{pmatrix}$.
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=AV_n$.
   b. Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0.
5. Soit n un entier naturel. On admet que

$$A^n=\begin{pmatrix}0,25\times0,3^n+0,75\times0,7^n & 0,375\left(-0,3^n+0,7^n\right)\\ 0,5\left(-0,3^n+0,7^n\right) & 0,75\times0,3^n+0,25\times0,7^n\end{pmatrix}.$$

   a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.
   b. En déduire l'expression de x_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.