

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.

Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.

En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2 .
2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
 - a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n + B$.
 - b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.
 - c. Pour tout entier naturel n , on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n , $Y_{n+1} = AY_n$.
3. Pour tout entier naturel n , on pose $Z_n = Y_{2n}$.
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = A^2 Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = 2Z_n$.
 - b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n ,

$$Y_{2n} = 2^n Y_0.$$

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.
 - a. On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p .
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a .

Que fait cet algorithme? Justifier la réponse.

- b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.