Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 1 100 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 100 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin du bassin A est transféré vers le bassin B, et pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1\,100$ et $b_0 = 1\,100$.
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.
   Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1		
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6	4	1 236,72	963,28
7	5	1 252,54	947,46
8	6	1 264,40	935,60
9	7	1 273,30	926,10
10	8	1 279,98	920,02
11	9	1 234,98	915,02
12	10	1 288,74	911,26
13	11	1 291,55	908,45
14	12	1 293,66	906,34
15	13	1 295,25	904,75
16	14	1 296,44	903,56
17	15	1 297,33	902,67
18	16	1 298,00	902,00
19	17	1 298,50	901,50
20	18	1 298,87	901,13

3. Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $S = MS + R$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - S = M(X_n - S)$.

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n, $X_n - S = M^n(X_0 - S)$ et que $M^n = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,75^n & 0,6-0,6\times 0,75^n \\ O,4-0,4\times 0,75^n & 0,4+0,6\times 0,75^n \end{pmatrix}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} 1300-200\times 0,75^n \\ 900+200\times 0,75^n \end{pmatrix}$.

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie

$$1300 - a_n < 1,5 \quad \text{et} \quad b_n - 900 < 1,5.$$

Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.