

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.

Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.

Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.

Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.

Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.

Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5% des individus tombent malades ;
- 20% des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience. On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$

1. Calculer a_1 , b_1 et c_1 .
2. a) Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n .
b) Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n .

On admet que $c_{n+1} = 0,2b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n , on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. a) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $U_n = A^n \times U_0$.

- b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n) & 0,8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n) & 1 - 0,8^n & 1 \end{pmatrix}$

4. a) Vérifier que pour tout entier naturel n , $b_n = \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n)$

- b) Déterminer la limite de la suite (b_n) .

- c) On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.

On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

À cet effet, on utilise l'algorithme donné en **annexe 2 (à rendre avec la copie)**, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n) .

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en **annexe 2**.

Conclure.

EXERCICE 4
Algorithme et tableau à compléter

Variables	: b, b', x, y sont des réels k est un entier naturel n est un entier										
Initialisation	: Affecter à n la valeur 0 Affecter à b' la valeur 0,05 Affecter à k la valeur 0 Affecter à x la valeur 0,95 Affecter à y la valeur 0,8										
Traitement	: Tant que $b < b'$ faire : <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10px;"> </td><td>Affecter à k la valeur $k + 1$</td></tr> <tr><td style="width: 10px;"> </td><td>Affecter à b la valeur b'</td></tr> <tr><td style="width: 10px;"> </td><td>Affecter à x la valeur $0,95x$</td></tr> <tr><td style="width: 10px;"> </td><td>Affecter à y la valeur $0,80y$</td></tr> <tr><td style="width: 10px;"> </td><td>Affecter à b' la valeur</td></tr> </table> Fin Tant que		Affecter à k la valeur $k + 1$		Affecter à b la valeur b'		Affecter à x la valeur $0,95x$		Affecter à y la valeur $0,80y$		Affecter à b' la valeur
	Affecter à k la valeur $k + 1$										
	Affecter à b la valeur b'										
	Affecter à x la valeur $0,95x$										
	Affecter à y la valeur $0,80y$										
	Affecter à b' la valeur										
Sortie	: Afficher										

	k	b	c	d	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7 ^e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8 ^e passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9 ^e passage éventuel dans la boucle Tant que						