Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé.
Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note : X_n l'évènement « la marque X est utilisée le mois n »,
Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée le mois n »,
Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des évènements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement $x_n, y_n z_n$.
La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.
Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :

50 % de chance de rester fidèle à cette marque,

40 % de chance d'acheter la marque Y,

10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :

30 % de chance de rester fidèle à cette marque,

50 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :

70 % de chance de rester fidèle à cette marque,

10 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. **a.** Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
On admet que :
$y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n$ et que $z_{n+1} = 0,1x_n + 0,2y_n + 0,7z_n$.

b. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels. A, B et U des matrices
Entrée et initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

Traitement	Tant que $i < n$
	  U prend la valeur $A \times U + B$
	  i prend la valeur $i + 1$
	Fin de Tant que

Sortie	Afficher U

a. Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?
Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.
On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a. Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$.
En déduire que $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4. On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$.

b. On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.
Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?