

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

A et X sont des nombres entiers	
Saisir un entier positif A	
Affecter à X la valeur de A	
Tant que X supérieur ou égal à 26	Affecter à X la valeur X - 26
Fin du tant que	
Afficher X	

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?
2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

- **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $(x_1 \ x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Étape 2** : $(x_1 \ x_2)$ est transformé en $(y_1 \ y_2)$ tel que

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

- **Étape 3** : $(y_1 \ y_2)$ est transformé en $(z_1 \ z_2)$ tel que

$$\begin{cases} z_1 \equiv y_1 (26) & \text{avec } 0 \leq z_1 \leq 25 \\ z_2 \equiv y_2 (26) & \text{avec } 0 \leq z_2 \leq 25 \end{cases}$$

- **Étape 3** : $(z_1 \ z_2)$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :

RE $\rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow$ DP
Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. Soient x_1, x_2, x'_1, x'_2 quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 & \equiv & 3x'_1 + x'_2 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv & 5x'_1 + 2x'_2 & (26). \end{cases}$

b. En déduire que $x_1 \equiv x'_1 \pmod{26}$ et $x_2 \equiv x'_2 \pmod{26}$ puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a. Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C .

b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 15 \end{pmatrix}$.

c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x_1 & \equiv & y_1 & (26) \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 & \equiv & y_2 & (26) \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{cases}$

d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

3. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient x_1 et x_2 , les nombres entiers tels que $\begin{cases} x_1 & \equiv & y'_1 & (26) \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 & \equiv & y'_2 & (26) \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{cases}$

Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 & \equiv & z_1 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv & z_2 & (26). \end{cases}$

Conclure.

4. Décoder QC.