

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.

Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B.

Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

- sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;
- sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n , on note a_n (respectivement b_n) le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année (2013 + n).

Partie A - Algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

Début de l'algorithme
 Lire n
 Affecter à a la valeur 20
 Affecter à b la valeur 10
 Affecter à i la valeur 2013
 Afficher i
 Afficher a
 Afficher b
 Tant que $i < n$ faire
 Affecter à c la valeur $(0,8a + 0,3b)$
 Affecter à b la valeur $(0,2a + 0,7b)$
 Affecter à a la valeur c
 Fin du Tant que
Fin de l'algorithme

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.
2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur ayant choisi l'année 2020.

*** Algorithme lancé ***
 En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
 En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
 En l'année 2015, a prend la valeur 18,5 et b prend la valeur 11,5
 En l'année 2016, a prend la valeur 18,25 et b prend la valeur 11,75
 En l'année 2017, a prend la valeur 18,125 et b prend la valeur 11,875
 En l'année 2018, a prend la valeur 18,042 5 et b prend la valeur 11,937 5
 En l'année 2019, a prend la valeur 18,031 25 et b prend la valeur 11,968 75
 En l'année 2020, a prend la valeur 18,015 625 et b prend la valeur 11,984 375
 *** Algorithme terminé ***

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites (a_n) et (b_n) .

Partie B - Étude mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.

On admet alors que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}.$$

On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice M^n .

3. Exprimer a_n en fonction de n , pour tout entier naturel $n \geq 1$.
4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.