On définit les suite (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0\ ;\ v_0 = 1\ ,\ \text{et} \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : u, v et w des nombres réels
            N et k des nombres entiers
Initialisation : u prend la valeur 0
                 v prend la valeur 1
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de N
Pour k variant de 1 à N
    w prend la valeur u
    u prend la valeur (w + v)/2
    v prend la valeur (w + 2v)/3
Fin du Pour
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P′ et B par $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit PP′.
On admet que $\mathrm{P}'\mathrm{BP} = \mathrm{A}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\mathrm{A}^n = \mathrm{P}'\mathrm{B}^n\mathrm{P}$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $\mathrm{B}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.
En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5. a. Montrer que $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.
En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).