Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.

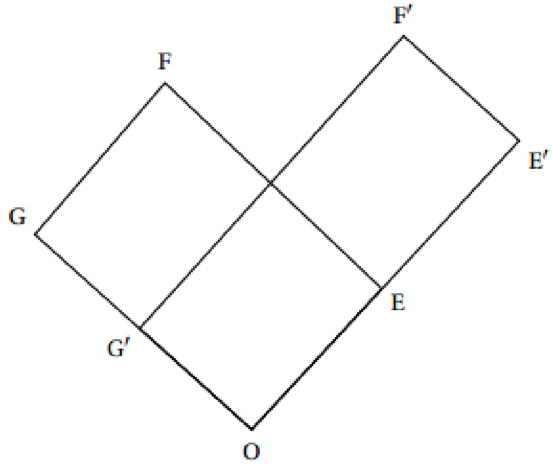

Figure 1

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2\,;2)$, $(-1\,;5)$ et $(-3\,;3)$.
La transformation du logiciel associe à tout point $M(x\,;\,y)$ du plan le point $M'(x'\,;\,y')$, image du point M tel que :

$$\left\{\begin{array}{lll} x' & = & \frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y \\ y' & = & \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y \end{array}\right.$$

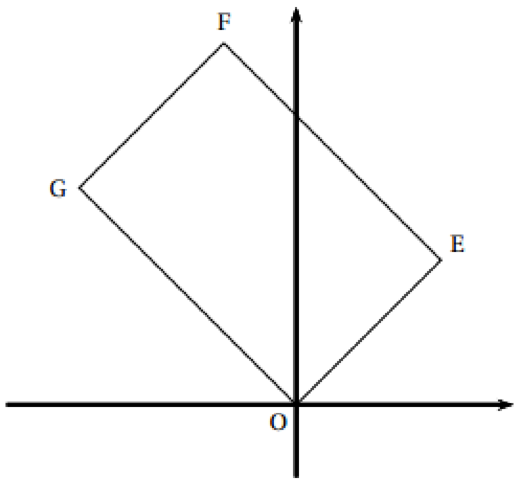

Figure 2

1. **a.** Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

   b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

   Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
   Une erreur a été commise.
   Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

   Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ du plan par $E_0 = \text{E}$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $\left(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1}\right)$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}.
Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme :
   $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
   $$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.
   On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ du point E_n vérifient :
   $$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   b. Démontrer que la longueur $\text{O}E_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.